거듭제곱과 거듭제곱근

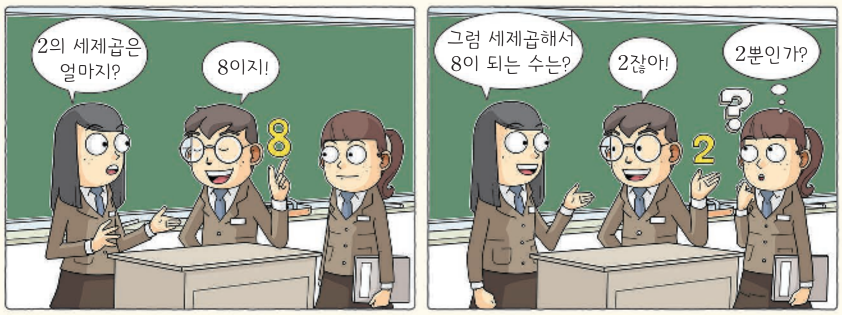
성취 기준 • 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

거듭제곱과 거듭제곱근이란 무엇일까?

탐구 학습

열기

다음을 읽고 세제곱하여 8이 되는 수 중에서 실수인 것을 말하여 보자.



다지기

세제곱하여 8이 되는 수를 x라 하면 $x^3=8$이므로

$$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

에서 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 세제곱하여 8이 되는 수 중에서 실수인 것은 2뿐이다.

키우기

거듭제곱하여 실수 a가 되는 수 중에서 실수인 것은 어떻게 구할까?

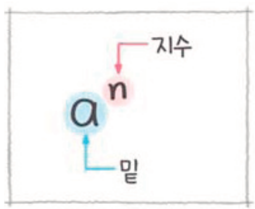
거듭제곱

실수 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고, 기호로

$$a^n$$

과 같이 나타낸다.

또 $a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라 한다.



지수가 자연수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 자연수일 때의 지수법칙

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$

❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$

❹ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

❺ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

개념 확인

a가 0이 아닌 실수일 때

$(a^3)^4 = a^{3\times4} = a^{12}$　　　$a^2 \div a^5 = \dfrac{1}{a^{5-2}} = \dfrac{1}{a^3}$

문제 1 a, b가 0이 아닌 실수일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^2)^3 \times (a^2)^2$　　(2) $ab^3 \div a^2 b$　　(3) $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3 \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

거듭제곱근

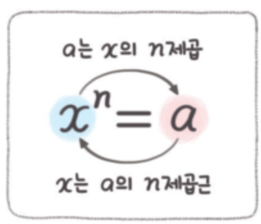
제곱하여 실수 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 실수 a가 되는 수를 a의 세제곱근이라 한다. 예를 들어 $5^2=25$이므로 5는 25의 제곱근이고, $(-2)^3=-8$이므로 -2는 -8의 세제곱근이다.

일반적으로 n이 2 이상의 정수일 때, n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라 한다.

또 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …, n제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라 한다.



실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다.

예제 1

-8의 세제곱근을 모두 구하시오.

풀이 ▶ -8의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-8$, $x^3+8=0$

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

이므로

$x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근은 -2, $1\pm\sqrt{3}i$이다.

답 -2, $1\pm\sqrt{3}i$

따라 하기

1의 네제곱근을 모두 구하시오.

풀이 ▶ 1의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=1$, ________

____

이므로

____

따라서 1의 네제곱근은 ________(이)다.

답 ________

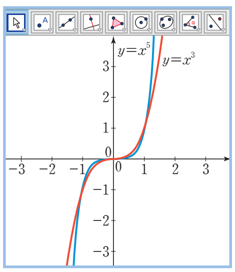
문제 2 다음 거듭제곱근을 모두 구하시오.

(1) -125의 세제곱근 (2) 16의 네제곱근

실수인 거듭제곱근

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구하여 보자.

n이 2 이상의 정수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.



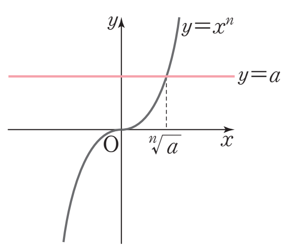
(i) n이 홀수일 때

임의의 실수 x에 대하여

$$(-x)^n=-x^n$$

이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.

이때 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 관계없이 항상 한 개이다.

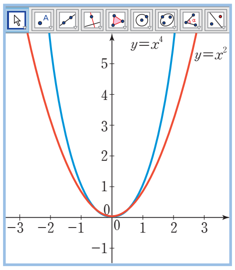


따라서 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나 존재하고, 이것을 기호로

$$\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

$\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라 읽는다. 또 $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

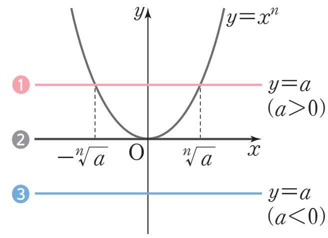


(ⅱ) n이 짝수일 때

임의의 실수 x에 대하여

$$(-x)^n=x^n$$

이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다. 이때 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 따라 다음과 같다.



❶ $a>0$이면 교점은 두 개이고, 두 교점의 x좌표는 각각 양수와 음수이다.
따라서 a의 n제곱근 중에서 양의 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음의 실수인 것을 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

❷ $a=0$이면 교점은 한 개이고, 교점의 x좌표는 0이다.
따라서 0의 n제곱근은 0 하나뿐이고, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

❸ $a<0$이면 교점은 없다.
따라서 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

a의 실수인 n제곱근

a가 실수이고 n이 2 이상의 정수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

개념 확인 실수인 거듭제곱근 구하기

27의 세제곱근 중에서 실수인 것
→ $\sqrt[3]{27}=3$

−27의 세제곱근 중에서 실수인 것
→ $\sqrt[3]{-27}=-3$

81의 네제곱근 중에서 실수인 것
→ $\sqrt[4]{81}=3$, $-\sqrt[4]{81}=-3$

−81의 네제곱근 중에서 실수인 것
→ 없다.

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[4]{256}$

(3) $\sqrt[5]{-243}$ (4) $-\sqrt[6]{64}$

거듭제곱근에는 어떤 성질이 있을까?

거듭제곱근의 성질

$a>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, $\sqrt[n]{a}$는 a의 양의 n제곱근이므로

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

이다.

이제 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이다. 이때 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$$

이다. 따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{ab}$와 같다. 즉

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

이다.

일반적으로 거듭제곱근의 성질은 다음과 같다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때

❶ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ❷ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

❸ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ❹ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

➕ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

| 거듭제곱근의 성질 증명하기

예제 2 $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

증명 ▶ 지수법칙에 따라 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$

이때 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$

따라서 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\dfrac{a}{b}$의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$와 같으므로 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

문제 **4** $a>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

(1) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

| 거듭제곱근의 성질을 이용하여 계산하기

예제 3 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $(\sqrt[3]{3})^6$ (4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^{12}}}$

풀이 ▶ (1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4\times2}=\sqrt[3]{2^3}=(\sqrt[3]{2})^3=2$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=(\sqrt[3]{3})^3=3$

(3) $(\sqrt[3]{3})^6=\{(\sqrt[3]{3})^3\}^2=3^2=9$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^{12}}}=\sqrt[3\times4]{5^{12}}=\sqrt[12]{5^{12}}=(\sqrt[12]{5})^{12}=5$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 9 (4) 5

문제 **5** 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}$ (2) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$

(3) $(\sqrt[6]{16})^3$ (4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{125^3}}$

생각을 넓히는 수학

오류 찾기

다음 중에서 틀린 것을 찾아 그 까닭을 말하고 바르게 고쳐 보자.

(1) $\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$

(2) $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$

(3) $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$

스스로 확인하기

1

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때, 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) n이 홀수일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $\square$(이)다.
n이 짝수일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$, $\square$(이)다.

(2) ❶ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\square}$

❷ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\square}$

❸ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^{\square}}$

❹ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[\square]{a}$

2

다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

(1) -64의 세제곱근 (2) 625의 네제곱근

3

다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}$

(3) $(\sqrt[5]{2})^{10}$ (4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{7^{15}}}$

4

다음 식을 간단히 하시오.

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$$

5

3^{10}의 다섯 제곱근 중에서 실수인 것을 a라 할 때, a의 네제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하시오.

6 창의·융합

서양 음악의 음계에서 한 옥타브는 12개의 반음으로 이루어져 있다. 다음을 읽고, x의 값을 구하시오.